DOI:10.14188/j.1671-8844.2023.0522
文章编号:1671-8844(2026)09-1458-11

双室箱梁剪力滞效应的分析方法

周世军[1,2],史雨安[1],周操[1],汪刚[1],白瑞聪[1]

(1. 重庆大学土木工程学院,重庆 400045;
2. 重庆大学山地城镇建设与新技术教育部重点实验室,重庆 400045)

摘要:针对双室箱梁剪力滞效应问题,提出了一种基于剪力流分布规律的解析理论与有限梁段法。将双室箱形截面剪切流分布零点作为立方抛物线形式纵向位移函数的原点,通过能量变分法推导得到控制微分方程和边界条件。在能量方程的基础上提出了1个结点具有2个剪力滞位移自由度的有限梁段,根据Lagrange原理与Hermite原理构造出位移插值函数,并推导出对应的刚度矩阵,最后对简支双室箱梁进行剪力滞效应算例分析。研究结果表明:所提方法精确度高,适用性好;所提有限梁段法与解析解吻合良好,可分析不同荷载条件下的剪力滞效应;双室箱梁不同腹板处的剪力滞系数存在差异,距离剪力流零点越远其剪力滞系数越大;集中弯矩作用造成的剪力滞效应远大于其他荷载作用,且在集中弯矩处剪力滞系数会发生突变。

关键词:双室箱梁;剪力滞效应;能量变分法;有限梁段法;数值模拟
中图分类号:U 441;U 448.213　**文献标志码:**A

Analysis method of shear lag effect of twin-cell box girder

ZHOU Shijun[1,2], SHI Yu'an[1], ZHOU Cao[1], WANG Gang[1], BAI Ruicong[1]

(1. School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China;
2. Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area of Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

Abstract: To address the shear lag effect problem of double-cell box girders, an analytical theory and a finite beam segment method based on the distribution law of shear flow are proposed. The zero point of the shear flow distribution in the double-cell box section is taken as the origin of the longitudinal displacement function in the cubic parabola form, and the governing differential equation and boundary conditions are derived by the energy variation method. Based on the energy equation, a finite beam segment with two degrees of freedom for shear lag displacement at one node is proposed. According to the Lagrange and Hermite principles, the displacement interpolation function is constructed, and the corresponding stiffness matrix are derived. Finally, a shear lag effect calculation example for the simply supported double-cell box girder is analyzed. The research results show that the proposed method has high accuracy and good applicability; the proposed finite beam segment method agrees well with the analytical solution, and can analyze the shear lag effect under different load conditions; there are differences in the shear lag coefficients at different webs of the double-cell box girder, and the farther the distance from the shear flow zero point, the larger the shear lag coefficient; the shear lag effect caused by concentrated bending moment is much larger than that caused by other loads, and the shear lag coefficient

收稿日期:2024-02-26
作者简介:周世军(1961-),男,教授,博士生导师,主要从事桥梁工程结构研究,E-mail:sjzhou8@163.com。
基金项目:重庆市永川区技术创新与应用发展专项重点项目(编号:2021yc-cxfz20004)。

本文引用格式:周世军,史雨安,周操,等.双室箱梁剪力滞效应的分析方法[J].武汉大学学报(工学版),2026,59(9):1458-1468.
Citation:ZHOU Shijun, SHI Yuan, ZHOU Cao, et al. Analysis method of shear lag effect of twin-cell box girder[J]. Engineering Journal of Wuhan University, 2026, 59(9):1458-1468.

undergoes a sudden change at the concentrated bending moment point

Key words: double-cell box girder; shear lag effect; energy variation method; finite beam segment method; numerical simulation

箱形截面梁自重轻、抗弯和抗扭性能好，已在现代桥梁结构中广泛应用。随着现代交通的发展，单箱双室截面梁桥应运而生，一些单室箱梁桥开裂和倒塌事故证明剪力滞效应是桥梁工程中不容忽视的关键力学行为之一[1]。双室截面比单室截面更加复杂，有必要对双室箱梁进行剪力滞效应分析研究。

剪力滞效应是由剪切变形引起的应力沿翼缘分布不均匀的现象，它会导致箱梁挠度与峰值应力的增加。目前可采用多种方法进行剪力滞效应分析[2-6]，其中能量变分法便于使用且具有较好的适用性，在其基础上又发展了便于连续梁等复杂桥型应用的有限梁段法。目前剪力滞位移函数的选择多为二次抛物线[7]、三次抛物线[8]和余弦函数[9]，为提高分析结果的准确性，LUO等[10]引入了一个用来满足双室截面轴向平衡的附加项；张元海等[11]定义了2个全局修正系数，避免了剪力滞翘曲应力产生附加轴力和附加弯矩，充分体现了其自平衡特性；蔺鹏臻等[12]通过单室箱梁的剪切变形规律定义了剪力滞翘曲函数；LI等[13]根据剪切流分布对多室箱梁的翼缘宽度进行了重新划分；LUO等[14]建立了具有剪力滞位移自由度的有限梁段模型；周世军[15]将剪力滞自由度扩展成2个，能更好地适应不同的边界条件；LI等[16]在建立有限梁段模型时又考虑了剪切变形；HE等[17]在有限梁段里增加了腹板的纵向位移，并针对不同的翼缘板采用独立的剪力滞翘曲位移函数；PAN等[18]通过有限元模拟分析了双室箱梁的剪力滞效应问题。

以往对剪力滞效应的研究很少从箱梁剪力流分布规律的角度进行分析，尤其针对双室箱梁的相关研究更少，且大多数研究无法反映双室箱形截面不同腹板处的应力差异[10,19]。此外，在构建有限梁段时，以往研究很少能解决集中弯矩产生的剪力滞效应问题。

本文针对双室箱梁剪力滞效应问题，提出了一种基于剪力流分布规律的解析理论与对应的可以考虑集中弯矩作用的有限梁段法。首先通过求解双室箱形截面的剪力流分布规律，利用剪力流分布的零点作为立方抛物线形式的纵向位移函数的原点；然后利用轴向平衡和连续性条件求解引入的未知参数，并采用能量变分法推导出控制微分方程和边界条件，提出了双室箱梁的一个结点具有2个剪力滞自由度的有限梁段，并求解出对应的刚度矩阵，最后通过算例验证了所提方法的准确性与适用性。

1　双室截面剪力流分布规律

图1为一个典型的简化后的单箱双室梁截面，其中原点o位于截面中心。根据薄壁结构原理，闭口截面剪力流等于开口截面剪力流加附加静定剪力流，且截面内剪应力沿壁厚方向均匀分布。开口剪力流的大小主要取决于从自由表面到所需点的静力矩[12]：

$$q_0 = -QS_x/I_x \tag{1}$$

式中：q_0为开口剪力流；Q为横截面剪力；S_x为对x轴的静力矩；I_x为截面对x轴的惯性矩。为简化计算，假设Q与I_x值为1。

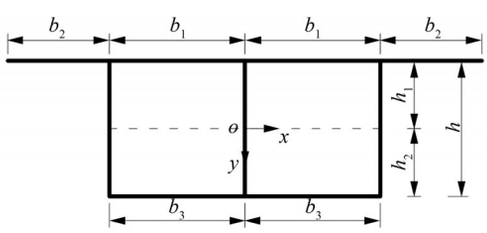


图1　典型双室箱梁截面示意图

Fig.1　Schematic diagram of a typical double-cell box girder section

假设双室截面的底板与中腹板在连接处存在2个开口，则开口截面剪力流分布规律如图2所示。顶板的开口剪力流分布存在正负变换的情况，其零点位置可由下式求得：

$$x_0 = \frac{2t_2b_3h_2 + t_{w2}h_2^2 - t_{w2}h_1^2 - 2t_1b_2h_1}{2t_1h_1} \tag{2}$$

式中：x_0为顶板开口剪力流零点到边腹板的距离；b_2为悬臂板宽度；b_3为底板宽度的一半；h_1、h_2分别为截面形心到上、下翼板中面的距离；t_1为顶板与悬臂板的厚度；t_2为底板厚度；t_{w2}为边腹板厚度。

利用变形协调关系与对称性可得到各室的附加静定剪力流：

$$q_1 = -q_2 =$$

$$-\frac{\dfrac{b_3^2h_2}{2}+\dfrac{b_3t_2h_2h}{t_{w2}}+\dfrac{x_0^2h_1}{2}-\dfrac{(b_1-x_0)^2h_1}{2}}{\dfrac{b_3}{t_2}+\dfrac{2h}{t_{w1}}+\dfrac{b_1}{t_1}+\dfrac{h}{t_{w2}}} \tag{3}$$

式中：q_1、q_2分别为第1、2室的附加静定剪力流；b_1为顶板宽度的一半；h为底板中面到顶板中面的距离，代表梁高；t_{w1}为中腹板厚度。

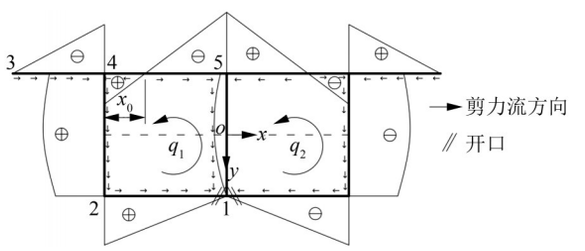


图2 开口截面剪力流示意图

Fig.2 Schematic diagram of shear flow in the opening section

双室箱形截面中的总剪力流分布如图3所示。由图3可见，总剪力流分布在顶板和底板上，都存在正负交替现象，且剪力流零点的位置并不在各室的中心轴上，有一定的偏离。因此，根据剪力流零点位置，每半块顶板被分为长度分别为b_{11}、b_{12}的两部分，每半块底板被分为长度分别为b_{31}、b_{32}的两部分。悬臂板的剪切流零点在自由端，从自由端到边腹板的距离为b_{21}。

$$\begin{cases} b_{11}=b_1-b_{12} \\ b_{12}=x_0+\dfrac{q_1}{t_1h_1} \\ b_{21}=b_2 \\ b_{31}=\dfrac{q_1}{t_2h_2} \\ b_{32}=b_3-b_{31} \end{cases} \tag{4}$$

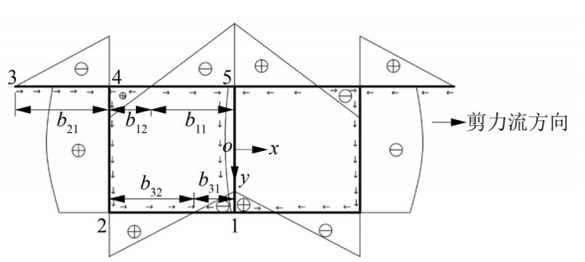


图3 闭口剪力流示意图

Fig.3 Schematic diagram of shear flow in the closed section

2 能量变分法基本方程

2.1 基本假设与纵向位移函数

在利用能量变分法进行双室箱梁剪力滞效应分析时，需引入以下合理假设[15,20]：

1)截面的中性轴可由初等梁理论确定，且在弯曲应力作用下位置保持不变。

2)忽略平面外的剪切变形，视为平面应力问题。

3)剪力滞效应改变了截面的正应力分布，但不影响箱梁的整体纵向内力，整体纵向内力仍采用初等梁理论计算。

基于上述假设和剪力流分布规律，构造双室箱梁纵向位移函数：

$$\begin{cases} u_1=h_1\left[w_z'+\left(-\eta_1\dfrac{(x-b_{11})^3}{b_{11}^3}+d_1\right)\varphi_z\right], \\ 0\leqslant x\leqslant b_{11} \\ u_2=h_1\left[w_z'+\left(\eta_2\dfrac{(x-b_{11})^3}{b_{12}^3}+d_2\right)\varphi_z\right], \\ b_{11}\leqslant x\leqslant b_1 \\ u_3=h_1\left[w_z'+\left(-\eta_3\dfrac{(x-b_1-b_{21})^3}{b_{21}^3}+d_3\right)\varphi_z\right], \\ b_1\leqslant x\leqslant b_1+b_2 \\ u_4=-h_2\left[w_z'+\left(-\eta_4\dfrac{(x-b_{31})^3}{b_{31}^3}+d_4\right)\varphi_z\right], \\ 0\leqslant x\leqslant b_{31} \\ u_5=-h_2\left[w_z'+\left(\eta_5\dfrac{(x-b_{31})^3}{b_{32}^3}+d_5\right)\varphi_z\right], \\ b_{31}\leqslant x\leqslant b_3 \\ u_{w1}=-yw_z'+h_1(\eta_1+d_1)\varphi_z, \\ -h_1\leqslant y\leqslant h_2 \\ u_{w2}=-yw_z'+h_1(\eta_2+d_2)\varphi_z, \\ -h_1\leqslant y\leqslant h_2 \end{cases} \tag{5}$$

式中：u_1、u_2、u_3、u_4、u_5、u_{w1}、u_{w2}分别为顶板b_{11}段、顶板b_{12}段、悬臂板b_{21}段、底板b_{31}段、底板b_{32}段、中腹板和边腹板的纵向位移；w为竖向位移，w'为转角；φ为剪切转角的最大差值；$d_1\sim d_5$、$\eta_1\sim\eta_5$为描述方程分布的形状参数；z为沿梁纵向方向距离；x、y分别为沿截面宽度、高度方向距离。

本文以顶板b_{11}段剪切变形为基础，取各板相对剪切变形作为各位移函数三次项前的系数η_n，其中$n=1,2,\cdots,5$，并通过连续性进行修正后可得

$$\begin{cases}\eta_1=\dfrac{b_{11}^2t_1h_1}{b_{11}^2t_1h_1},\quad \eta_2=\dfrac{b_{12}^2t_1h_1}{b_{11}^2t_1h_1}\\ \eta_3=\dfrac{b_{21}^2t_1h_1}{b_{11}^2t_1h_1},\quad \eta_4=\dfrac{b_{31}^2t_2h_2}{b_{11}^2t_1h_1}\\ \eta_5=\dfrac{h_1}{h_2}(\eta_1-\eta_2)+\eta_4\end{cases}\tag{6}$$

根据剪力滞效应引起的截面轴力平衡条件与连续条件，$d_n(n=1,2,\cdots,5)$表达为

$$\begin{cases}d_1=-(A_{11}\eta_1+A_{12}\eta_2-3\eta_3A_2+\\ \quad(3\eta_1+\eta_2)A_{32}+\dfrac{3\eta_4h_2A_3}{h_1})/4A-\\ \quad(\eta_2A_2+\eta_1A_{31}+\eta_1A_{w1}+\eta_2A_{w2})/A\\ d_2=d_1\\ d_3=\eta_2+d_2-\eta_3\\ d_4=-\dfrac{h_1}{h_2}(\eta_1+d_1)-\eta_4\\ d_5=d_4\end{cases}\tag{7}$$

式中：A为全截面面积；A_{11}、A_{12}、A_2、A_3、A_{32}、A_{31}、A_{w1}、A_{w2}分别为b_{11}、b_{12}、b_2、b_3、b_{32}、b_{31}、中腹板、边腹板对应的面积。

2.2　控制微分方程与边界条件

双室箱梁的总势能Π可表示为

$$\Pi=\int_0^L\left[M w''+\frac{E}{2}N_1(w'')^2+EN_2w''\varphi'+\frac{E}{2}N_3(\varphi')^2+\frac{9G}{10}N_4\varphi^2\right]\mathrm{d}z\tag{8}$$

式中：M为截面弯矩；E为弹性模量；G为剪切模量；L为梁长；N_1、N_2、N_3、N_4为截面特性参数。

$$\begin{cases}N_1=\sum\limits_{n=1}^{5}I_n+\sum\limits_{n=1}^{2}I_{wn}\\ N_2=\sum\limits_{n=1}^{5}I_n\left(\dfrac{\eta_n}{4}+d_n\right)-\\ \quad\sum\limits_{n=1}^{2}\dfrac{3h_1(h_2-h_1)(\eta_i+d_n)I_{wn}}{2(h_2^2-h_1h_2+h_1^2)}\\ N_3=\sum\limits_{n=1}^{5}I_n\left(\dfrac{\eta_n^2}{7}+\dfrac{\eta_nd_n}{2}+d_n^2\right)+\\ \quad\dfrac{3h_1^2(\eta_1+d_1)^2}{(h_2^2-h_1h_2+h_1^2)}I_{w1}+\dfrac{3h_1^2(\eta_2+d_2)^2}{(h_2^2-h_1h_2+h_1^2)}I_{w2}\\ N_4=\sum\limits_{n=1}^{5}I_n\dfrac{n\eta_n^2}{b_k^2}\end{cases}\tag{9}$$

式中：I_{w1}为中腹板的惯性矩，$I_{w1}=t_{w1}(h_2^3+h_1^3)/3$；$I_{w2}$为边腹板的惯性矩，$I_{w2}=2t_{w2}(h_2^3+h_1^3)/3$；$I_n$为翼板忽略自身弯曲惯性矩后对中性轴的惯性矩，$I_1=2b_{11}t_1h_1^2$，$I_2=2b_{12}t_1h_1^2$，$I_3=2b_{21}t_1h_1^2$，$I_4=2b_{31}t_2h_2^2$，$I_5=2b_{32}t_2h_2^2$；$b_k$为$n=1,2,\cdots,5$时对应的板宽，依次对应$b_{11}$、$b_{12}$、$b_{21}$、$b_{31}$、$b_{32}$。

利用最小势能原理，经过分部积分与整理后可得到控制微分方程和边界条件：

$$\left[EN_1w''+EN_2\varphi'+M\right]\delta w''=0\tag{10}$$

$$\left[EN_2w'''+EN_3\varphi''-\frac{9G}{5}N_4\varphi\right]\delta\varphi=0\tag{11}$$

$$\left[EN_2w''+EN_3\varphi'\right]\delta\varphi\Big|_0^L=0\tag{12}$$

联立式(10)～(12)，可求得剪切转角的最大差值φ的微分方程：

$$\varphi''-\alpha^2\varphi=\beta Q\tag{13}$$

$$\varphi=\beta\left(C_1\sinh\alpha z+C_2\cosh\alpha z-\frac{Q}{\alpha^2}\right)\tag{14}$$

$$\alpha=\sqrt{\frac{9GN_1N_4}{5E(N_1N_3-N_2^2)}}$$

$$\beta=\frac{N_2}{E(N_1N_3-N_2^2)}$$

将式(10)代入式(12)，可得到：

$$E\left(N_3-\frac{N_2^2}{N_1}\right)\left[\varphi'-\beta M\right]\delta\varphi\Big|_0^L=0\tag{15}$$

由式(15)可见，当存在集中弯矩时，弯矩发生突变剪力滞位移也发生突变。将与剪力滞位移φ相对应的力定义为剪力滞力矩S[19]，其表达式为

$$S=-E\left(N_3-\frac{N_2^2}{N_1}\right)\left[\varphi'-\beta M\right]\tag{16}$$

2.3　剪力滞系数的定义

剪力滞系数λ是衡量剪力滞效应的重要指标，其计算式为

$$\lambda=\sigma/\bar{\sigma}_z=1+\sigma_m/\bar{\sigma}_z\tag{17}$$

式中：σ为考虑剪力滞效应后的截面总应力；$\bar{\sigma}_z$为按初等梁理论计算得出的截面应力，$\bar{\sigma}_z=My/N_1$；σ_m为剪力滞引起的应力值。

选取位移函数的端点作为双室截面剪力滞系数选取的关键点，即各板剪力流值最大或为0的点。双室箱梁截面关键点a_1～a_7如图4所示。

双室箱梁截面各关键点的剪力滞系数为

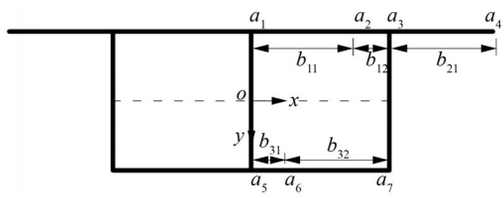


图4　双室箱梁截面关键点

Fig.4　Key points of the double-cell box girder section

$$\begin{cases}\lambda_{a_1}=1-\dfrac{(N_1\eta_1+N_1d_1-N_2)E}{M}\varphi'\\ \lambda_{a_2}=1-\dfrac{(N_1d_1-N_2)E}{M}\varphi'\\ \lambda_{a_3}=1-\dfrac{(N_1\eta_2+N_1d_2-N_2)E}{M}\varphi'\\ \lambda_{a_4}=1-\dfrac{(N_1d_3-N_2)E}{M}\varphi'\\ \lambda_{a_5}=1-\dfrac{(N_1\eta_4+N_1d_4-N_2)E}{M}\varphi'\\ \lambda_{a_6}=1-\dfrac{(N_1d_4-N_2)E}{M}\varphi'\\ \lambda_{a_7}=1-\dfrac{(N_1\eta_5+N_1d_5-N_2)E}{M}\varphi'\end{cases} \tag{18}$$

将式(16)代入式(18),得到

$$\begin{cases}\lambda_{a_1}=1-\dfrac{(N_1\eta_1+N_1d_1-N_2)(N_2M-N_1S)}{(N_1N_3-N_2^2)M}\\ \lambda_{a_2}=1-\dfrac{(N_1d_1-N_2)(N_2M-N_1S)}{(N_1N_3-N_2^2)M}\\ \lambda_{a_3}=1-\dfrac{(N_1\eta_2+N_1d_2-N_2)(N_2M-N_1S)}{(N_1N_3-N_2^2)M}\\ \lambda_{a_4}=1-\dfrac{(N_1d_3-N_2)(N_2M-N_1S)}{(N_1N_3-N_2^2)M}\\ \lambda_{a_5}=1-\dfrac{(N_1\eta_4+N_1d_4-N_2)(N_2M-N_1S)}{(N_1N_3-N_2^2)M}\\ \lambda_{a_6}=1-\dfrac{(N_1d_4-N_2)(N_2M-N_1S)}{(N_1N_3-N_2^2)M}\\ \lambda_{a_7}=1-\dfrac{(N_1\eta_5+N_1d_5-N_2)(N_2M-N_1S)}{(N_1N_3-N_2^2)M}\end{cases} \tag{19}$$

3 基于能量变分法的有限梁段法推导

3.1 有限梁段基本元素

如图5所示,本文提出一种有10个位移量、单元长为l的有限梁段,梁段上作用竖向分布荷载q_{wz}与纵向分布荷载q_{vz}。节点位移向量$\boldsymbol{\delta}$与荷载向量F可表示为

$$\boldsymbol{\delta}=\begin{bmatrix}v_i & w_i & w_i' & \varphi_i & \varphi_i' & v_j & w_j & w_j' & \varphi_j & \varphi_j'\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{20}$$

$$F=\begin{bmatrix}F_{Ni} & Q_i & M_i & S & T_i & F_{Nj} & Q_j & M_j & S_j & T_j\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

式中:v为由轴力引起的轴向位移;w为竖向位移;w'为转角;φ、φ'为剪力滞位移;F_N为轴力;T为剪力滞双力矩;i、j分别表示梁单元的i、j端。

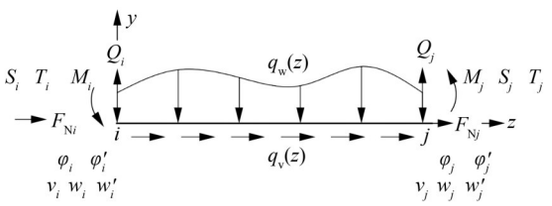


图5 有限梁段示意图

Fig.5 Schematic diagram of a finite beam segment

根据Lagrange原理与Hermite原理构造插值函数:

$$v=\boldsymbol{N}_v\boldsymbol{\delta},\quad w=\boldsymbol{N}_w\boldsymbol{\delta},\quad \varphi=\boldsymbol{N}_\varphi\boldsymbol{\delta} \tag{22}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{N}_v=\begin{bmatrix}R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{N}_w=\begin{bmatrix}0 & R_3 & R_4 & 0 & 0 & 0 & R_5 & R_6 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{N}_\varphi=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & R_3 & R_4 & 0 & 0 & 0 & R_5 & R_6\end{bmatrix}\end{cases} \tag{23}$$

式中:$\boldsymbol{N}_v$、$\boldsymbol{N}_w$、$\boldsymbol{N}_\varphi$为形状函数。

$$\begin{cases}R_1=1-\dfrac{z}{l}\\ R_2=\dfrac{z}{l}\\ R_3=2\dfrac{z^3}{l^3}-3\dfrac{z^2}{l^2}+1\\ R_4=\dfrac{z^3}{l^2}-2\dfrac{z^2}{l}+z\\ R_5=-2\dfrac{z^3}{l^3}+3\dfrac{z^2}{l^2}\\ R_6=\dfrac{z^3}{l^2}-\dfrac{z^2}{l}\end{cases} \tag{24}$$

当节点上存在集中弯矩时,由式(15)可知剪力滞位移φ'也发生突变,为满足变形协调关系,相邻单元在公共节点上的位移条件为

$$(\varphi_j')^e-\beta(M_j)^e=(\varphi_i')^{e+1}+\beta(M_i)^{e+1} \tag{25}$$

式中:e为单元编号。则修正后的节点位移向量$\bar{\boldsymbol{\delta}}$与荷载向量$\bar{F}$为

$$\bar{\boldsymbol{\delta}}=\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\delta}_0=\begin{bmatrix}v_i & w_i & w_i' & \varphi_i & \varphi_i' & v_j & w_j & w_j' & \varphi_j & \varphi_j'\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}-\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & -\beta M_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta M_j\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}v_i & w_i & w_i' & \varphi_i & \bar{\varphi}_i' & v_j & w_j & w_j' & \varphi_j & \bar{\varphi}_j'\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{26}$$

$$\bar{F}=F-\boldsymbol{K}\boldsymbol{\delta}_0 \tag{27}$$

式中：$\boldsymbol{K}$为刚度矩阵；$\boldsymbol{\delta}_0$为位移向量修正项。

最终的有限梁段基本方程为

$$\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{\delta}}=\bar{\boldsymbol{F}} \tag{28}$$

3.2　单元刚度矩阵

梁段的单元刚度矩阵根据有限元理论得到。根据式(22)可得梁段变形能$\boldsymbol{U}$：

$$\boldsymbol{U}=\int_0^l\left[\frac{E}{2}N_1(w'')^2+EN_2w''\varphi'+\frac{E}{2}N_3(\varphi')^2+\frac{9G}{10}N_4\varphi^2+\frac{EA}{2}(v')^2\right]\mathrm{d}z=$$
$$\frac{E\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}}{2}\int_0^l\left[N_1\boldsymbol{N}_w''^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_w''+N_2\left(\boldsymbol{N}_w''^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_\varphi'+\boldsymbol{N}_\varphi'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_w''\right)+N_3\boldsymbol{N}_\varphi'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_\varphi'+\frac{9G}{5E}N_4\boldsymbol{N}_\varphi{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_\varphi+A\boldsymbol{N}_v'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_v'\right]\mathrm{d}z\boldsymbol{\delta} \tag{29}$$

根据式(29)得到单元刚度矩阵$\boldsymbol{K}$：

$$\boldsymbol{K}=\int_0^l\left[EN_1\boldsymbol{N}_w''^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_w''+EN_2\left(\boldsymbol{N}_w''^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_\varphi'+\boldsymbol{N}_\varphi'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_w''\right)+EN_3\boldsymbol{N}_\varphi'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_\varphi'+\frac{9G}{5}N_4\boldsymbol{N}_\varphi{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_\varphi+EA\boldsymbol{N}_v'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_v'\right]\mathrm{d}z=$$
$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{K}_{\mathrm{s}}+\boldsymbol{K}_{\mathrm{n}} \tag{30}$$

其中：$\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}$为弯曲变形刚度矩阵；$\boldsymbol{K}_{\mathrm{s}}$为剪力滞位移刚度矩阵；$\boldsymbol{K}_{\mathrm{n}}$为轴向变形刚度矩阵。

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}=\int_0^l EN_1\boldsymbol{N}_w''^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_w''\mathrm{d}z=\frac{EN_1}{l^3}\begin{bmatrix}0&&&&&&&&&\\0&12&&&&&&&&\\0&6l&4l^2&&&&&\text{Sym.}&&\\0&0&0&0&&&&&&\\0&0&0&0&0&&&&&\\0&0&0&0&0&0&&&&\\0&-12&-6l&0&0&0&12&&&\\0&6l&2l^2&0&0&0&-6l&4l^2&&\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix} \tag{31}$$

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{s}}=\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2+\boldsymbol{K}_3=\int_0^l\left[EN_2\left(\boldsymbol{N}_w''^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_\varphi'+\boldsymbol{N}_\varphi'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_w''\right)+EN_3\boldsymbol{N}_\varphi'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_\varphi'+\frac{9G}{5}N_4\boldsymbol{N}_\varphi{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_\varphi\right]\mathrm{d}z \tag{32}$$

$$\boldsymbol{K}_1=\frac{EN_2}{2l}\begin{bmatrix}0&&&&&&&&&\\0&0&&&&&&&&\\0&0&0&&&&&\text{Sym.}&&\\0&0&2&0&&&&&&\\0&-2&-l&0&0&&&&&\\0&0&0&0&0&0&&&&\\0&0&0&0&2&0&0&&&\\0&0&0&-2&-l&0&0&0&&\\0&0&-2&0&0&0&0&2&0&\\0&2&l&0&0&0&-2&l&0&0\end{bmatrix} \tag{33}$$

$$\boldsymbol{K}_2=\frac{EN_3}{30l}\begin{bmatrix}0&&&&&&&&&\\0&0&&&&&&&&\\0&0&0&&&&&\text{Sym.}&&\\0&0&0&36&&&&&&\\0&0&0&3l&4l^2&&&&&\\0&0&0&0&0&0&&&&\\0&0&0&0&0&0&0&&&\\0&0&0&0&0&0&0&0&&\\0&0&0&-36&-3l&0&0&0&36&\\0&0&0&3l&-l^2&0&0&0&-3l&4l^2\end{bmatrix} \tag{34}$$

$$\boldsymbol{K}_3=\frac{3GN_4l}{700}\begin{bmatrix}0&&&&&&&&&\\0&0&&&&&&&&\\0&0&0&&&&&\text{Sym.}&&\\0&0&0&156&&&&&&\\0&0&0&22l&4l^2&&&&&\\0&0&0&0&0&0&&&&\\0&0&0&0&0&0&0&&&\\0&0&0&0&0&0&0&0&&\\0&0&0&54&13l&0&0&0&156&\\0&0&0&-13l&-3l^2&0&0&0&-22l&4l^2\end{bmatrix} \tag{35}$$

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{n}}=\int_0^l EA\boldsymbol{N}_v'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_v'\mathrm{d}z=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}1&&&&&&&&&\\0&0&&&&&&&&\\0&0&0&&&&&\text{Sym.}&&\\0&0&0&0&&&&&&\\0&0&0&0&0&&&&&\\-1&0&0&0&0&1&&&&\\0&0&0&0&0&0&0&&&\\0&0&0&0&0&0&0&0&&\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix} \tag{36}$$

4 简支双室箱梁算例分析

本文计算了跨度L=40 m的简支双室箱梁分别在集中力、均布荷载和弯矩3种荷载作用下的剪力滞系数。双室箱梁截面如图1所示,取b_1=5 m、b_2=3 m、b_3=5 m、t_1=0.2 m、t_2=0.25 m、t_{w1}= 0.3 m、t_{w2}=0.3 m、h=5 m,根据式(4)计算可得该截面剪力流分布零点的位置:b_{11}=2.874 4 m、b_{12}=2.125 6 m、b_{21}=3 m、b_{31}= 1.811 5 m、b_{32}= 3.188 5 m。本文算例中顶板剪力流零点靠近边腹板,底板剪力流零点更靠近中腹板,取E=34.5 GPa、泊松比μ=0.2、G=E/(2+2μ)进行计算。

为避免畸变与应力集中,本文在进行有限元模拟时,均布荷载和集中荷载在截面横向分别作用于3个腹板部位[21],如图6所示。

假设集中力荷载F=200 kN作用于简支梁跨中,其顶板与底板剪力滞系数沿梁的纵向分布如图7所示,跨中及跨中附近截面剪力滞系数沿截面的横向分布如图8所示。由图7、8可见,集中荷载作用下简支双室箱梁的剪力滞效应在集中力作用点及其附近较为明显;双室箱梁不同腹板处的剪力滞系数也不同,距离剪力流零点较远的腹板的剪力滞系数较大;顶板剪力流零点距离中腹板较远,中腹板与顶板连接处的剪力滞系数比边

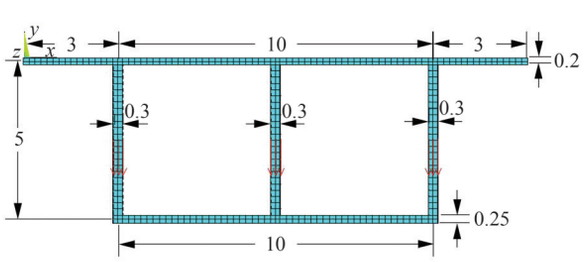


图6 有限元模拟荷载施加位置示意图(单位:m)

Fig.6 Schematic diagram of load application position in finite element simulation(unit:m)

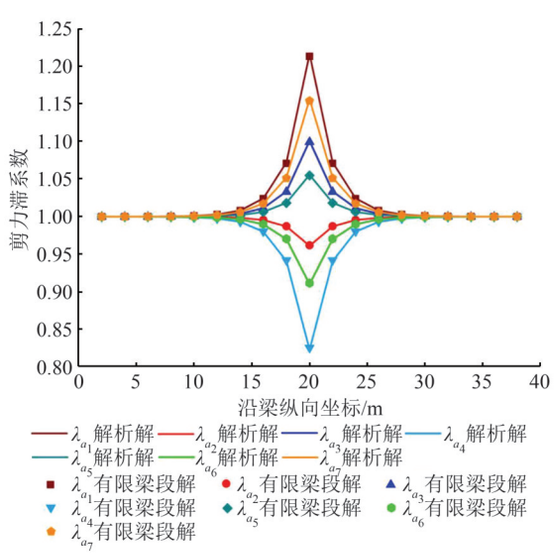


图7 跨中集中荷载作用下纵向剪力滞系数分布

Fig.7 Longitudinal distribution of shear lag coefficients under mid-span concentrated load

腹板与顶板连接处大；底板剪力流零点靠近中腹板，边腹板与底板连接处的剪力滞系数比中腹板与底板连接处大，这与顶板正好相反。本文解析解结果与有限梁段法结果吻合良好，且与ANSYS解结果误差较小，证明了本文解析解与有限梁段法的准确性。

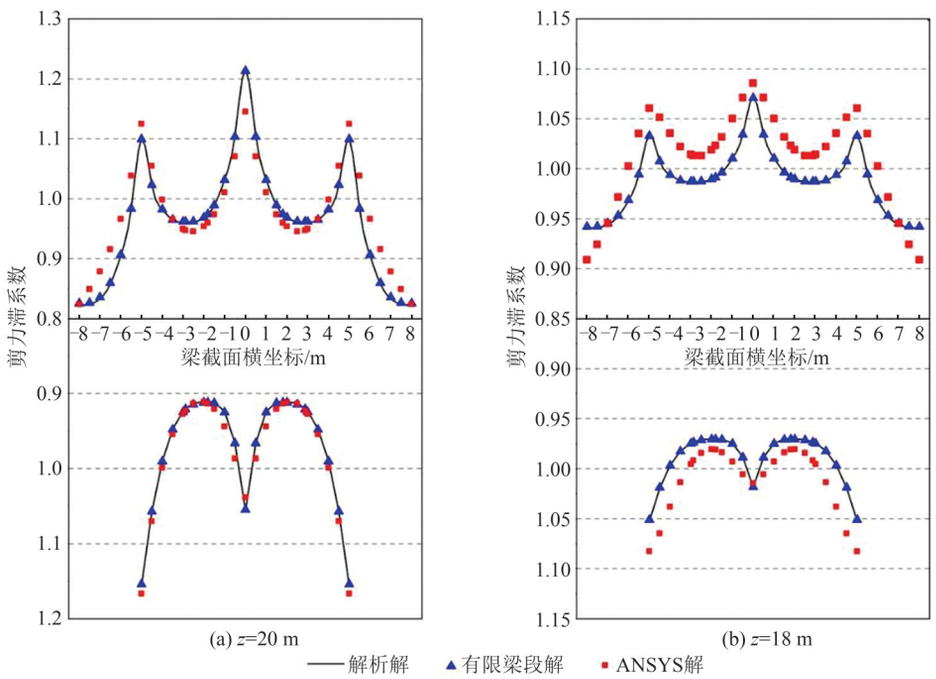


图 8　跨中集中荷载作用下横向剪力滞系数分布

Fig.8　Transverse distribution of shear lag coefficients under mid-span concentrated load

设均布荷载 f=50 kN/m 作用于简支双室箱梁，顶板与底板的剪力滞系数沿梁纵向分布，如图 9 所示。与集中荷载作用下简支双室箱梁的剪力滞效应不同，均布荷载作用下简支双室箱梁在全桥各截面均有显著的剪力滞效应，支座处的应力较小，剪力滞效应最突出，根据式(17)得到的 λ 值偏大。

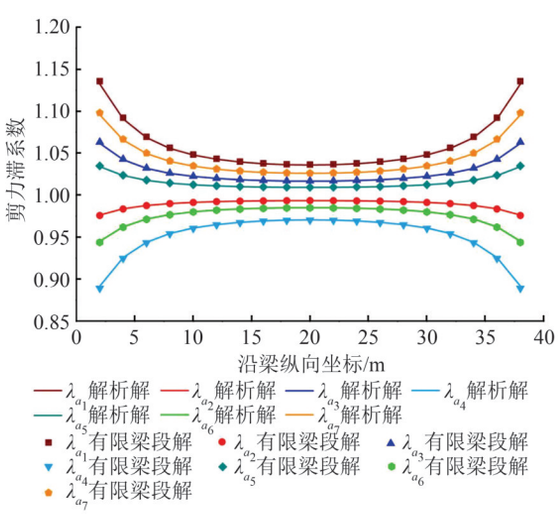


图 9　均布荷载作用下纵向剪力滞系数分布

Fig.9　Longitudinal distribution of shear lag coefficients under uniformly distributed load

图 10 为全桥应力较大的跨中截面处及其附近截面沿横向的剪力滞系数分布。由图 10 可见，均布荷载作用下剪力滞系数横向分布规律与集中荷载一致，不同腹板处的剪力滞系数与距离各板剪力流零点的远近有关。本文的有限梁段法、解析解与 ANSYS 的计算结果误差较小，说明本文方法的准确性较高，有限梁段法可适用于不同的荷载情况。

当简支双室箱梁受集中弯矩 M=2 000 kN·m 作用时，其顶板与底板剪力滞系数沿梁纵向分布，如图 11、12 所示。由图 11、12 可见，集中弯矩产生的剪力滞效应远超集中荷载与均布荷载产生的剪力滞效应；在集中弯矩处剪力滞效应是整个结构中最明显的，当集中弯矩作用在梁跨中时剪力滞系数对称分布，当集中弯矩作用在其他截面时剪力滞系数会发生突变。

5　结论

本文通过理论分析与数值模拟提出了基于剪力流分布规律的双室箱梁剪力滞效应解析解法与有限梁段法，可为双室箱梁的设计与施工提供理论支持与技术手段。主要结论如下：

1)与数值模拟结果对比可知，本文所提的基于

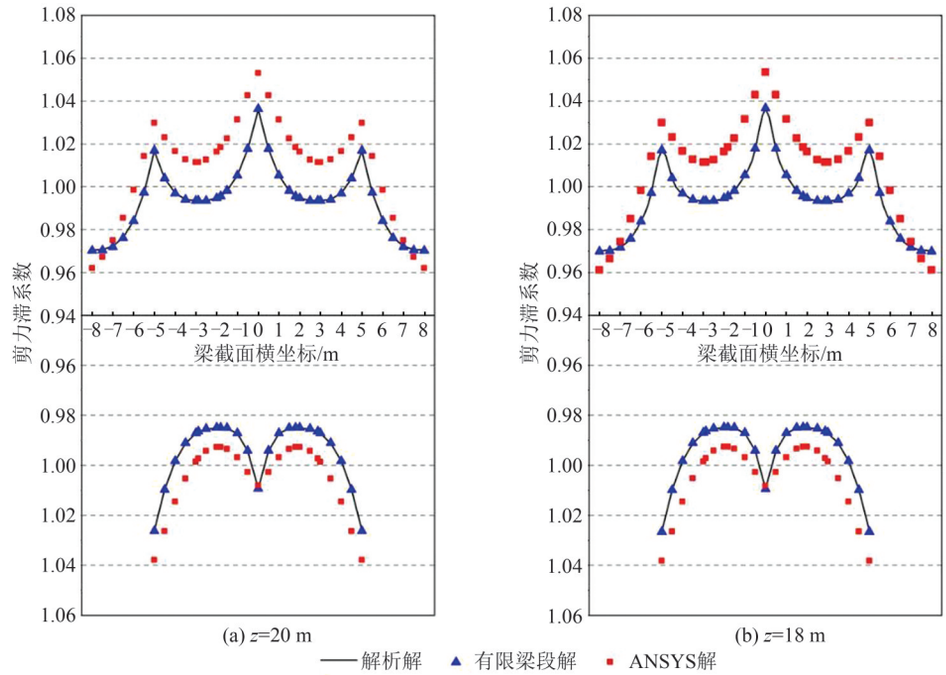


图 10　均布荷载作用下横向剪力滞系数分布

Fig.10　Transverse distribution of shear lag coefficients under uniformly distributed load

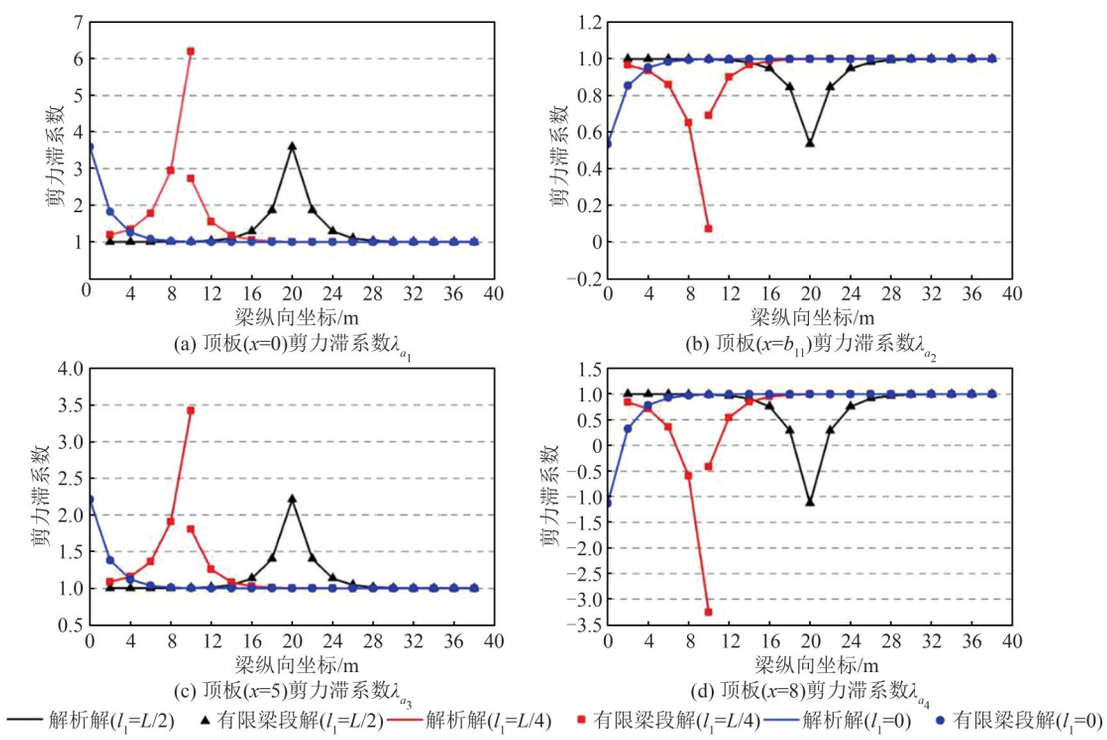


图 11　弯矩作用下顶板纵向剪力滞系数分布

Fig.11　Longitudinal distribution of shear lag coefficients of the top plate under bending moment

剪力流分布规律的分析方法较好地解决了双室箱梁不同腹板处剪力滞系数不同的问题,过程简单且精度较高。

2)本文所提有限梁段法结果与解析解结果吻合良好,且适用性高、便于使用,可分析不同荷载作用下的双室箱梁剪力滞效应。

3)双室箱梁不同腹板与顶、底板交接处的剪力滞系数不同,其大小与剪力流零点有关,距离剪力流零点越远剪力滞系数越大。

4)集中弯矩造成的剪力滞效应远大于集中荷

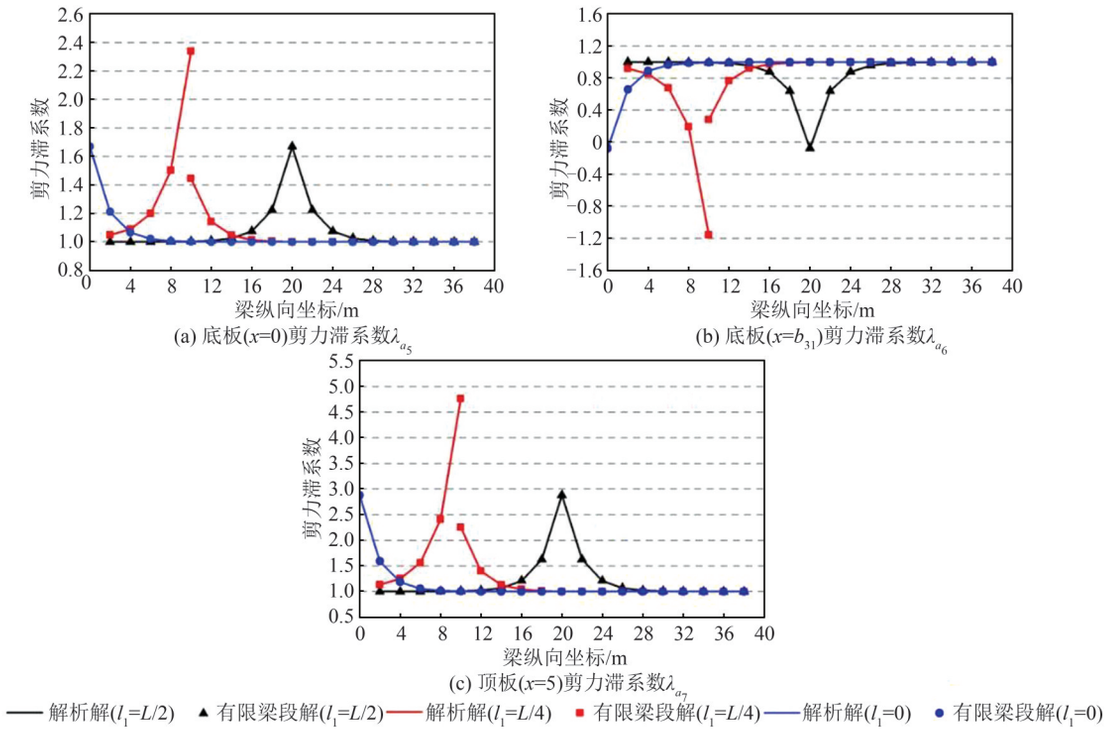


图 12　弯矩作用下底板纵向剪力滞系数分布

Fig.12　Longitudinal distribution of shear lag coefficients of the bottom plate under bending moment

载与均布荷载，且在集中弯矩处剪力滞系数会有突变并产生较大应力。

参考文献：

[1] 罗旗帜，俞建立．钢筋混凝土连续箱梁桥翼板横向裂缝问题[J]．桥梁建设，1997(1)：41-45.
LUO Qizhi，YU Jianli. Problems of transverse cracking in flange slabs of reinforced concrete continuous box girder bridge[J]. Bridge Construction，1997(1)：41-45.

[2] REISSNER E. Analysis of shear lag in box beams by the principle of minimum potential energy[J]. Quarterly of Applied Mathematics，1946，4(3)：268-278.

[3] ZHOU C，LI L F，WANG J Q. Modified bar simulation method for shear lag analysis of non-prismatic composite box girders with corrugated steel webs[J]. Thin-Walled Structures，2020，155：106957.

[4] ZHU L，KAI-LEUNG SU R，LI M J. Finite beam element with 26 DOFs for curved composite box girders considering constrained torsion，distortion，shear lag and biaxial slip[J]. Engineering Structures，2021，232：111797.

[5] CAMBRONERO-BARRIENTOS F，ARAGÓN-TORRE Á，MARTÍNEZ-MARTÍNEZ J A，et al. Experimental verification of a beam element for thin-walled beams with torsion，distortion，and shear lag[J]. Engineering Structures，2022，261：114249.

[6] 朱绪江，郭健，方明山，等．斜拉桥变宽度主梁的剪力滞效应分析[J]．工程力学，2021，38(S1)：93-99.
ZHU Xujiang，GUO Jian，FANG Mingshan，et al. Analysis of the shear lag effect in width-variant girders of cable-stayed bridges[J]. Engineering Mechanics，2021，38(S1)：93-99.

[7] 刘世忠，毛亚娜，马驰，等．单箱双室波形钢腹板-钢底板组合梁滑移效应研究[J]．桥梁建设，2023，53(4)：47-54.
LIU Shizhong，MAO Yana，MA Chi，et al. Study on slip effect of two-cell box girder with corrugated steel webs and steel bottom plates[J]. Bridge Construction，2023，53(4)：47-54.

[8] 潘旦光，付相球，韦杉杉，等．变高度悬臂箱梁剪力滞效应的半解析解[J]．工程力学，2018，35(9)：207-213.
PAN Danguang，FU Xiangqiu，WEI Shanshan，et al. Semi-analytic solution for shear lag effect of cantilever box girders with varying depth[J]. Engineering Mechanics，2018，35(9)：207-213.

[9] LI X Y，WAN S，MO Y L，et al. An improved method for analyzing shear lag in thin-walled box-section beam with arbitrary width of cantilever flange [J]. Thin-Walled Structures，2019，140：222-235.

[10] LUO M，LIN P Z，SUN L X. Analysis of shear lag

effect in twin-cell box girders[J]. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2019, 563(3): 032043.

[11] 张元海, 胡玉茹, 林丽霞. 基于修正翘曲位移模式的薄壁箱梁剪力滞效应分析[J]. 土木工程学报, 2015, 48(6): 44-50.
ZHANG Yuanhai, HU Yuru, LIN Lixia. Analysis on shear lag effect of thin-walled box girders based on a modified warping displacement mode[J]. China Civil Engineering Journal, 2015, 48(6): 44-50.

[12] 蔺鹏臻, 周世军. 基于剪切变形规律的箱梁剪力滞效应研究[J]. 铁道学报, 2011, 33(4): 100-104.
LIN Pengzhen, ZHOU Shijun. Analysis on shear-lag effect of box girders based on flange-slab shear deformation law[J]. Journal of the China Railway Society, 2011, 33(4): 100-104.

[13] LI X Y, WAN S, SHEN K J, et al. Prediction of shear lag effect in thin-walled single-box multicell box girder based on the modified warping displacement function [J]. Advances in Civil Engineering, 2020, 2020: 6815092.

[14] LUO Q Z, WU Y M, LI Q S, et al. A finite segment model for shear lag analysis[J]. Engineering Structures, 2004, 26(14): 2113-2124.

[15] 周世军. 箱梁的剪力滞效应分析[J]. 工程力学, 2008, 25(2): 204-208.
ZHOU Shijun. Shear lag analysis of box girders[J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(2): 204-208.

[16] LI X Y, WAN S, ZHANG Y H, et al. Beam finite element for thin-walled box girders considering shear lag and shear deformation effects[J]. Engineering Structures, 2021, 233: 111867.

[17] HE X Y, XIANG Y Q, QIU X, et al. Shear lag including axial balance of box beams by finite segment model[J]. Journal of Constructional Steel Research, 2022, 189: 107043.

[18] PAN J L, CHEN K L. Research on shear lag effect of cantilever concrete box beam with double chambers[J]. E3S Web of Conferences, 2022, 360: 01081.

[19] 张慧, 张玉元, 张元海. 单箱双室简支箱梁剪切变形剪力滞效应分析[J]. 铁道科学与工程学报, 2016, 13(12): 2413-2419.
ZHANG Hui, ZHANG Yuyuan, ZHANG Yuanhai. Analysis on shear deformation and shear-lag effect of twin-cell box girders[J]. Journal of Railway Science and Engineering, 2016, 13(12): 2413-2419.

[20] WU Y P, LIU S Z, ZHU Y L, et al. Matrix analysis of shear lag and shear deformation in thin-walled box beams[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2003, 129(8): 944-950.

[21] 雒敏, 蔺鹏臻, 孙理想. 单箱双室箱梁的剪力滞效应分析[J]. 力学与实践, 2013, 35(6): 70-74.
LUO Min, LIN Pengzhen, SUN Lixiang. Analysis of shear lag effect of twin-cell box girders[J]. Mechanics in Engineering, 2013, 35(6): 70-74.

(编辑:赵漫红)